Examen General de Geometría Algebraica - 2018-2

Miercoles 20 de junio del 2018

El examen dura **4 horas.** Resuelva 5 de los 6 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Encuentra las componentes irreducibles de
$$V := \{(x, y, z) \in A^3 : y^2 = xz, z^2 = y^3\}$$
Para cada componente irreducible C de V:
   (a) Escribe un conjunto de polinomios cuyo lugar de ceros sea C.
   (b) Demuestra que C es isomorfo a A^1.

2. (a) Demuestra que la subvariedad de A^n
$$V := \{(x, y, z) \in A^n : x_1 \cdots x_n = 1\}$$
es birracionalmente equivalente a A^{n-1}.
   (b) Demuestra que A^3 y $A \setminus \{0\} \times A^2$ son birracionalmente equivalentes pero no son isomorfas.

3. Sea $X \subset A^2$ la variedad afín definida por la ecuación
$$(y^2 + x)^2 + y^3 = 0$$
   (a) Encuentra los puntos singulares de la cerradura proyectiva de X
   (b) Demostrar que el mapeo de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^2$ dado por
$$(s : t) \mapsto (st^3 - t^4 : -s^2t^2 : s^4)$$
es un morfismo birracional de $\mathbb{P}^1$ en la cerradura proyectiva de X. ¿Es isomorfismo?

4. Sea V un subconjunto algebraico de A^n y
$$\rho : K[x_1, \ldots, x_n] \mapsto K[V] = \frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{I(V)}$$
el epimorfismo canónico. Demuestra que, bajo la biyección inducida por ρ entre ideales de $K[V]$ e ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a $I(V)$, se tiene que ideales radicales corresponden a ideales radicales, e ideales maximales corresponden a ideales maximales.

5. Demuestra que la imagen de la aplicación de Veronese
$$\nu : \mathbb{P}^1 \mapsto \mathbb{P}^d$$
es la curva proyectiva dada por los ceros de los polinomios que se obtienen al tomar los subdeterminantes 2×2 de la matriz $2 \times (d + 1)$:
$$\begin{pmatrix} z_{0,d} & z_{1,d-1} & \cdots & z_{d-1,1} & z_{d,0} \\ z_{1,d-1} & z_{2,d-2} & \cdots & z_{d,0} & z_{0,d} \end{pmatrix}$$

6. Probar que la intersección de n hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$ es no vacía.