Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM

Examen de Admisión - Álgebra Lineal
Semestre 2018-2

Instrucciones: Resuelva 4 y sólo 4 ejercicios (si se entregan más de 4 ejercicios sólo se calificarán los 4 primeros). El ejercicio 1 es *obligatorio*. Por favor, no ponga más de un problema por hoja y escriba su nombre en cada hoja.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (a) Determine los valores de a, b, c para los cuales el sistema (1) tiene una *única* solución.

   (b) Para aquellos valores de a, b, c para los cuales la solución no es única, encuentre todas las posibles soluciones.

2. Sea el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ está asociada a una transformación lineal $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, donde $m, n \in \mathbb{Z}_+$. La *nulidad* de A se define como la dimensión del núcleo de A,

$$\operatorname{nul}(A) = \dim \ker A = \dim\{x \in \mathbb{K}^n \,:\, Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^n,$$

   mientras que el *rango* de A se define como la dimensión de la imagen de A,

$$\operatorname{ran}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim\{y \in \mathbb{K}^m \,:\, y = Ax \text{ para algún } x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m.$$

   (a) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz cuadrada e invertible, demuestre que AB tiene la misma nulidad y el mismo rango que B, para cualquier matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

   (b) Si además $m = n$, ¿qué relación existe entre los valores propios y los vectores propios de las matrices AB y BA?

3. Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión $\dim V = 2$, generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre la matriz real y simétrica $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que es la proyección sobre V, es decir, $P^2 = P$ y $Pv \in V$ para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* v_1 y v_2 generan un plano en $\mathbb{R}^3$ con cierto vector normal n. Pv debe ser ortogonal a n para todo $v \in \mathbb{R}^3$.)

4. Dos matrices cuadradas A, B son *similares* si existe una matriz invertible M tal que $A = M^{-1}BM$. El polinomio *característico* de una matriz cuadrada A se define como $p_A(t) = \det(A - tI)$. El teorema de Cayley-Hamilton afirma que $p_A(A) = 0$ (puede tomar por cierto este teorema). El polinomio *mínimo* de una matriz cuadrada A es el polinomio $m_A(t)$ de grado mínimo tal que $m_A(A) = 0$, y si q es un polinomio tal que $q(A) = 0$ entonces q es un múltiplo de m_A (se dice que m_A divide a q).

   (a) Demuestre que dos matrices cuadradas similares tienen el mismo polinomio mínimo.

   (b) Demuestre que las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   tienen el mismo polinomio característico, pero *no* son similares.

5. Sea la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestre que $\lambda = 0$ es el único valor propio de A y encuentre un vector propio asociado $w_1 \in \ker A$. Demuestre que $\dim \ker A = 1$.

   (b) Encuentre dos vectores w_2, w_3, tales que $Aw_2 = w_1$, $Aw_3 = w_2$ y w_1, w_2, w_3 son linealmente independientes.

   (c) Sea M la matriz cuyas columnas son los vectores w_1, w_2 y w_3. Demuestre que

   $$M^{-1}AM = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   J es la forma de Jordan asociada a A.

6. Sea la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & -5 \\ 3 & 4 & 14 & -2 \\ -2 & -5 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que A es definida positiva (es decir, $x^\top Ax > 0$ para todo $x \neq 0$) y calcule el determinante de A aplicando el siguiente método: encuentre una matriz triangular superior L tal que $L^\top L = A$ (una matriz triangular superior L es aquella para la cual su (i, j)-ésima componente es $l_{ij} = 0$ si $i > j$). *Sugerencia:* la última columna de L es

   $$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$