Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen general de ecuaciones diferenciales parciales

Fecha XX de XXXX de 2019

Instrucciones:

- **Duración:** 4 horas
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

Preguntas

1. (6 pts) Sea $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } |x| < 1\}$ y $\Omega = B_1 \setminus \{0\}$.
   Demuestre que **no existe** $u \in C^2(\Omega) \cup C^0(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u(0) = 1 & \text{en } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   Ayuda:

   a) Sea $v \in C^\infty(B_1) \cup C^0(\overline{B_1})$ una función armónica en B_1 tal que $v = u$ sobre ∂B_1, y para $\varepsilon > 0$ considere
   $$w(x) = u(x) - v(x) - \varepsilon(|x|^{-1} - 1)$$
   Use el principio del máximo para concluir que
   $$w(x) \leq 0 \quad \text{en } B_1 \setminus B_\delta$$
   donde $B_\delta = \{|x| \leq \delta\}$ para $\delta \in (0,1)$.

   b) Tomando el límite demuestre que
   $$v(x) \leq u(x) \quad \text{para todo } x \in B_1 \setminus \{0\}.$$

   c) Argumente porque el punto anterior implica que
   $$v(x) = u(x) \ \text{ en } \ x \in B_1 \setminus \{0\}$$
   y explique porque esto implica que u como en (1) no puede existir.

2. (6 pts) Sea u una solución de la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin \omega t \sin x & \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = 0 \quad u_t = 0 & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2}$$

   donde $\omega > 0$ es la frecuencia de la fuerza aplicada al sistema.
   Demuestre que existe un valor ω_0 tal que:

   a) si $\omega \neq \omega_0$ la solución $u(x,t)$ de (2) es acotada para todo t.

b) si $\omega = \omega_0$ la solución $u(x,t)$ de (2) crece sin límite cuando t crece.

3. (6 pts) Encuentre para todo tiempo la solución de entropía al problema de la ecuación de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{para } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 4 \\ 2 & \text{para } 4 < x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{para } 2 < x \end{cases} & \text{en } x \in \mathbb{R}\times\{t=0\}. \end{cases} \tag{3}$$

Dibuje en el plano x–t los choques de características y las ondas de rarefracción.

4. (6pts) Resuelva el problema cuasi-lineal

$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u & \text{en } \mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \\ u(x,0) = x^2 \end{cases} \tag{4}$$

Discuta si la solución es global de clase C^1 y en su caso determine los posibles conjuntos donde la solución no es diferenciable.

5. (6pts) Sea u la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -\exp(-t)\sin(4\pi x) & (0,1)\times(0,\infty) \\ u = 0 & \partial(0,1)\times(0,\infty) \\ u = 0 & (0,1)\times\{t=0\} \end{cases} \tag{5}$$

Construya una sub y una supersolución a este problemay demuestre que $\lim_{t\to+\infty}|u(x,t)| = 0$ para toda $x \in (0,1)$.