Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen general de ecuaciones diferenciales parciales

Fecha 27 de junio de 2018

Instrucciones:

- **Duración:** 4 horas
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

Preguntas

1. Considere le siguiente problema

$$u_t - \big(u(1-u^2)\big)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

Encuentre una solución entrópica para todo tiempo $t \geq 0$. Escriba explicitamente la solución.

2. Sea $u(x,t)$ solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } [0,1] \times (0,\infty) \\ u(0,t) = 1, \quad u_x(1,t) = 0 & \text{para } t \in (0,\infty) \end{cases}$$

tal que $u(1/2,1) = 1$.
Determine la función $u(x,0)$ (es decir la condición inicial) y explique su respuesta.

3. Principio de reflexion. Sean

$$\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1\}$$
$$\mathscr{R}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \quad -1 < y < 1\}$$

Sea $u \in C^2(\mathscr{R}^+) \cap C(\overline{\mathscr{R}^+})$, armónico en $\mathscr{R}^+$ y tal que $u(x,0) = 0$.
Demuestre que

$$\omega(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \geq 0 \\ -u(x,-y) & y < 0 \end{cases}$$

es armónica en $\mathscr{R}$.
Sugerencia: Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en $\mathscr{R}$, con $w = \omega$ en $\partial \mathscr{R}$. Defina $W(x,y) = w(x,y) + w(x,-y)$ y demuestre que $W = 0$.

4. (Problema de la antena en 2 y 3 dimensiones) Considere el siguiente

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \left\{ \begin{array}{ll} \delta(x)\sin(2\pi t) & \text{en } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \leq t \end{array} \right\} & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde $n \in \{2,3\}$ representa la dimensión espacial y $\delta(x)$ es la función delta de Dirac en $x = 0$.

a) Asuma $n = 3$. Usando el principio de Huygens describa las soluciones a este problema en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ haciendo un dibujo.

b) Asuma $n = 2$. Considerando el dominio de integración de la fórmula de Poisson describa el cono de influencia de este problema en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ haciendo un dibujo.

c) ¿ Puede una antena funcionar en dimesnión 2? ¿ Por que?