ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen General Semestre 2019-I

Ejercicio 1 (20 puntos). Considere el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y + 2x + x^3. \end{aligned}$$

(a) Demostrar que $(0,0)$ es el único punto de equilibrio del sistema.

(b) Encontrar la linealización del sistema alrededor de $(0,0)$ y encontrar los espacios estables e inestables.

(c) Encontrar explícitamente el flujo asociado al sistema.

(d) Encontrar las variedades estable e inestable del $(0,0)$.

Ejercicio 2 (15 puntos). Considere el sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= -y + x^2. \end{aligned}$$

(a) Encuentre una aproximación para la variedad central local $y = h(x)$ válida en una vecindad del origen.

(b) ¿Es el origen un punto de equilibrio estable ? ¿asintóticamente estable ? ¿inestable ? Demuestre su conclusión analizando la dinámica a lo largo de la variedad central local determinada en el inciso (a).

Ejercicio 3 (25 puntos). Considere el siguiente sistema en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 4y - 2x^3 - 8xy^2, \\ \dot{y} &= x + 2y - 2x^2y - 8y^3, \\ \dot{z} &= \alpha z. \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Demuestre que $\gamma(t) = (\cos 2t, \frac{1}{2}\sin 2t, 0)$ es una órbita periódica.

(b) Encuentre la linealización del sistema alrededor de $\gamma(t)$.

(c) Encuentre la matriz fundamental principal $\Phi(t)$ del sistema encontrado en el inciso anterior.

(d) Use el inciso anterior para determinar los valores propios de la diferencial del mapeo de Poincaré en el punto $(1,0,0)$.

(e) Determine aquellos valores de α para los cuales γ es una órbita periódica hiperbólica y para estos valores dé las correspondientes dimensiones de las variedades estable e inestable alrededor de $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [0,\pi)\}$.

(f) Discuta la estabilidad de Γ en función de *todos* los valores del parámetro α.

Ejercicio 4 (20 puntos).

Considere el siguiente sistema en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -yz\\ \dot{y} &= 2xz\\ \dot{z} &= -xy.\end{aligned}$$

(a) Encontrar valores de A y B tales que

$$H(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + Az^2, \qquad C(x,y,z) = x^2 + y^2 + Bz^2,$$

sean integrales primeras del sistema.

(b) Demostrar que el flujo del sistema preserva el volumen en $\mathbb{R}^3$.

(c) Demostrar que el origen es un punto de equilibrio estable.

(d) Demuestre que los puntos $(0, y_0, 0)$ con $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son puntos de equilibrio inestables.

(e) Demuestre que los puntos $(x_0, 0, 0)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ son puntos de equilibrio estables. Sugerencia : Demuestre que para un valor de a apropiado, tenemos que

$$V(x,y,z) = H(x,y,z) - C(x,y,z) + (C(x,y,z) - a^2)^2$$

es una función de Lyapunov.

Ejercicio 5 (20 puntos). Considere el sistema conservativo con un grado de libertad

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= -\mu x + x^3,\end{aligned}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Determine aquellos valores de μ para los cuales el punto de equilibrio en el origen es estable y demuestre su afirmación.

De ahora en adelante únicamente considere los valores de μ encontrados en el inciso (a).

(b) Demuestre que, además del origen, existen dos puntos de equilibrio hiperbólicos. Discuta su estabilidad y determine las variedades estable e inestable de alguno de estos dos puntos.

(c) Determine aquellos valores de μ para los cuales $\gamma(t) = \phi_t(0,1)$ es una órbita periódica.

(d) Para aquellos valores de μ encontrados en el inciso anterior escribimos

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Calcule $\max_{t\in\mathbb{R}} |\gamma_1(t)|$ y dé una expresión para el periodo de γ (puede dejar su respuesta indicada como una integral).