POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

EXAMEN GENERAL

Miércoles 27 de junio, 2018

Instrucciones: Resolver todos los problemas
Máximo de tiempo 4 horas

1. Considere $|t-t_0| \leq \delta$ y $x(t), x_0 \in D, t, t_0 \in I$. Enuncie la desigualdad de Gronwall y úsela para probar que el problema de valores iniciales:

$$\dot{x} = f(x,t)$$
$$x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única $x(t)$, cuando $f(x,t)$ es una función que satisface la condición de Lipschitz:

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x-y|,$$

donde L es una constante positiva

2. Por medio del criterio de Dulac (extensión del Criterio negativo de Bendixson) muestre que el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - y + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

no posee solución periódica. Sugerencia, puede usar el factor $\rho(x) = e^{-2x}$ ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema?

3. Un modelo de cadena alimenticia está descrito por un sistema autónomo en tres dimensiones. Las poblaciones al tiempo t son:

$$x(t)\,,\ y(t) \text{ y } z(t)$$

y el sistema está dado por:

$$(s) = \begin{cases} \dot{x} &= x(1-x) - xy \\ \dot{y} &= y(1-x) + xy - yz \\ \dot{z} &= z(1-z) + yz \end{cases}$$

- Encuentre los puntos de equilibrio, calcule los valores propios de la matriz Jacobiana y determine qué tipo de punto de equilibrio se obtiene.

- Si supone que a una pequeña fracción de población z(t) le afecta una enfermedad mortal. ¿Qué término agregaría a la tercera ecuación del sistema? Explique lo que pueda de esta situación.

4. Pruebe que si se tienen los multiplicadores de Floquet

$$\mu_1, \mu_2 \dots, \mu_n$$

del sistema periódico

$$\dot{x} = A(t)x,$$

entonces

$$\mu_1\mu_2 \dots \mu_n = e^{\int_0^T tr[A(t)]dt}.$$

Dada la ecuación diferencial de Hill:

$$\dot{x} + q(t)y = 0,$$

muestre que sus multiplicadores satisfacen

$$\mu_1\mu_2 = 1.$$

Nota: Si $A(t)$ es una función matriz continua con un periodo positivo mínimo T, tal que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema de Floquet correspondiente, entonces la matriz

$$\Psi(t) = \Phi(t+T), t \in \mathbb{R}$$

también es matriz fundamental.

5. Dada la ecuación de Lienard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

dé condiciones para mostrar que en el plano fase el sistema correspondiente tiene exactamente un **ciclo límite** y es **estable**.

Haga un estudio de estabilidad de la ecuación:

$$\ddot{x} + (sen\, x/x)\dot{x} + x^3 = 0$$