Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Cada inciso de las preguntas cuenta un punto de un total de doce puntos. Puntaje mínimo para aprobar ocho puntos. Tiempo estimado 4 horas.

1. Considera el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde A es la matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - Calcula las tres primeras iteradas de Picard del sistema, y dá la solución explícita del sistema con condición inicial (t_0, x_0).
   - Analiza la estabilidad de la solución estacionaria con condición inicial $(t_0 = 0, x_0 = (0,0))$.
   - Bosqueja el retrato fase de las soluciones.
   - Determina las variedades estable e inestable de la solución estacionaria y grafícalas.

2. Considera el sistema en el plano:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y + xy^7 \\ -x + 2y + y^3 + 5x^4y^9 \end{pmatrix}.$$

   - Analiza la estabilidad de Lyapunov de la solución estacionaria con condición inicial (0,0).
   - Bosqueja el retrato fase de las soluciones en una vecindad del origen.

3. Considera el sistema en el plano:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x - x^3 + xy^2 \\ x + y - x^2y + y^3 \end{pmatrix}$$

   Sea $\varphi(t,(x,y)) = (\varphi_1(t,(x,y)), \varphi_2(t,(x,y))$ el flujo del sistema que satisface la condición inicial $\varphi(0,(x,y)) = (x,y)$.

   (a) Responde lo que se te pide:
   - Analiza la estabilidad de Lyapunov de la solución estacionaria.
   - Calcula los valores propios de la derivada con respecto a la condicón inicial a tiempo 2π del flujo en el punto $(0,0)$ es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(t,(x,y))=(2\pi,(0,0))}$$

(b) Responde los siguiente:

- Calcula la solución perdiódica del sistema.
- Bosqueja el retrato fase de las soluciones en el plano
- Calcula los valores propios de la derivada con respecto a la condicón inicial a tiempo 2π del flujo en el punto $(1,0)$ es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(t,(x,y))=(2\pi,(1,0))}$$

- Analiza la estabilidad de la solución periódica. ¿Es la solución periódica asintoticamente Lyapunov estable? Justifica tus respuestas.