Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico

Jueves 10 de Enero de 2019
Horario : 11:00 a 14:30 hrs

Lugar: Laboratorio de Cómputo Científico cub. 240, 2do piso Depto. de Matemáticas.
Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios.
Calificación: Suma de puntos dividida por 3.

1. (6 pts.) Considera a los números de punto flotante $fl(10, 5, -99, 99)$.

   a) Encuentra la cardinalidad del conjunto.

   b) Halla el elemento α positivo más chico.

   c) Halla el elemento ω positivo más grande.

   d) ¿Cuál es el espaciamiento mínimo entre dos números consecutivos?

   e) ¿Cuál es el espaciamiento máximo entre dos números consecutivos?

   f) ¿Cuántos elementos son enteros?

2. (4 pts.) En aritmética exacta, muestra que $1/(2+\sqrt{3})^4 = 97 - 56\sqrt{3}$. Con una Aritmética de Punto Flotante de 4 dígitos con redondeo y tomando 1.732 como $\sqrt{3}$, calcula:

   a) $1/(2+\sqrt{3})^4$

   b) $97 - 56\sqrt{3}$

   c) ¿Con qué expresión se efectúan menos operaciones?

   d) ¿Con cuál se obtiene mejor resultado y por qué?

3. (5 pts.) Demuestre que si $g : R \to R$ satisface

   - $g(x^*) = x^*$
   - $g'(x^*) = 0$
   - $g \in C^2$

   entonces

   a) Existe una vecindad de x^* tal que si x_0 está en esa vecindad entonces la sucesión

   $$x_{n+1} = g(x_n)$$

   converge

   b) La convergencia es cuadrática

4. (5 pts.) Sea el sistema $Ax = b$ con $A \in R^{n\times n}; \quad x, b \in R^n$. Realice el análisis de sensibilidad cuando se perturba la matriz A y el vector b, es decir, analice las soluciones del sistema $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Dé su conclusión de acuerdo a lo obtenido por el análisis de sensibilidad.

5. (4 pts.) Dados los siguientes vectores:

   $$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   Encuentre la matriz de rotación R y el reflector de Householder H tales que:

   $$Ru = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Hv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

6. (6 pts.) Determina los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_3, \delta_1, \delta_3$ tal que $S(x)$ sea un spline cúbico de Hermite, donde:

   $$S(x) = \begin{cases} \alpha_1(x+1)^3 + \beta_1(x+1)^2 + \gamma_1(x+1) + \delta_1, & x \in [-1, 0] \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + 2x + 3, & x \in [0, 1] \\ \alpha_3(x-1)^3 + \beta_3(x-1)^2 + \gamma_3(x-1) + \delta_3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

   con $S(-1) = 2,\ S'(-1) = 1,\ S(1) = 7, S'(1) = 7,\ S(2) = 14,\ S'(2) = 8.$