Vniversidad Nacional
Avtonoma de
Mexico

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

25 de junio de 2018

---

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

---

## Análisis Real

1. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que si $f \in L_p(X, \mathcal{M}, \mu), 1 \leq p \leq \infty$ y $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos $\mu$-medibles tales que $\mu(A_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\int_{A_n} f d\mu \to 0$ cuando $n \to \infty$ .

2. (6 puntos) Sea $f_n(x) = \frac{\chi_{[0,n]}(x)}{n^p}$ para $n \geq 1$ y $\infty > p > 0$. ¿Dado $\infty > p > 0$ existe una función $g \in L_1([0, \infty))$ que domine a todas las $f_n$'s?

3. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu) = ((0,1], \mathcal{B}((0,1]), \lambda)$, donde $\mathcal{B}((0,1])$ es la $\sigma$-álgebra de Borel inducida en $(0,1]$ y $\lambda$ es la medida de Lebesgue. Para cada entero $n \geq 1$, se toma $k = j + (n(n-1))/2$, donde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Observe que $k$ toma todos los valores enteros no negativos y que $k \to \infty$ si y sólo si $n \to \infty$. Defina para toda $k \geq 1$

$$f_k(x) = \mathbf{1}_{((j-1)/n,\, j/n]}(x) \quad \text{para cada} \quad x \in (0,1]. \tag{1}$$

   (a) Sea $1 \leq p < \infty$. Demuestre que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ converge en $L^p$ a la función $f(x) = 0$ para cada $x \in (0,1]$.

   (b) Demuestre que $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ no existe para ninguna $x \in (0,1]$.

   (c) Encuentre una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ de $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ tal que $\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x) = 0$ para todo $x \in (0,1]$.

4. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean $\mu$ y $\nu$ dos medidas en $\mathcal{F}$, donde $\nu$ es finita. Recuerde que $\nu$ es absolutamente continua con respecto a $\mu$, denotado por $\nu \prec \mu$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ implica que $\nu(A) = 0$.

   (a) Demuestre que $\nu \prec \mu$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para toda $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < \delta(\epsilon)$ se tiene que $\nu(A) < \epsilon$.

   (b) Dé un ejemplo de un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \nu)$, donde $\nu$ no es finita, tal que $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ y $B_n \downarrow \emptyset$, pero $\nu(B_n)$ no converge a $\nu(\emptyset) = 0$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R < +\infty$ y $|z| < R$. Sea $M(r) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$ para $0 < r < R$. Se define $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

   (a) Muestre que $F(z)$ es una función entera.

   (b) Muestre que $|F(z)| \leq M(r) e^{\frac{|z|}{r}}$, para $z \in \mathbb{C}$ y $0 < r < R$.

   (c) Muestre que

   $$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w) e^{z/w}}{w} dw$$

   para $z \in \mathbb{C}$, donde $\gamma_r$ es la circunferencia con centro en $w = 0$ y radio $r$ recorrida en sentido positivo y dando una sola vuelta alrededor del 0.

2. (6 puntos) Sea $f(z) = \frac{1}{sen\ z} - \frac{1}{z}$

   (a) ¿Cuáles son los puntos singulares de la función $f(z)$ y de qué tipo son?

   (b) Encuentre el residuo de $f$ en cada una de las singularidades.

   (c) Para $z$ con $|z| < 1$, considere

   $$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

   Muestre que $F(z)$ es analítica en 0 y encuentre $F^{'}(0)$.

3. (6 puntos) Evalúe la siguiente integral

   $$\oint_{|z|=2} \frac{e^{1/z^2}}{1-z} dz$$

4. (6 puntos) Demuestre que para una función meromorfa con un número finito de puntos singulares la suma de todos los residuos (incluyendo el residuo al infinito) es igual a cero.