VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

16 de enero de 2018

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ es tal que existe $C > 0$ para la que
$$\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E f d\mu\right| \leq C,$$
para todo $E \in \mathcal{M}, 0 < \mu(E) < \infty$. Pruebe que $|f(x)| \leq C$ casi donde sea.

2. (6 puntos) Sean $X = (0,1)$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(0,1)$ y m la medida de Lebesgue. Pruebe que
$$L^\infty(X, \mathcal{M}, m) \subsetneq \bigcap_{0<p<\infty} L^p(X, \mathcal{M}, m)$$
y que la contención es propia.

3. (6 puntos) Considérese el espacio con medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones μ-medibles, no negativas tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ casi siempre y
$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f d\mu\,.$$
Probar que
$$\int_E f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f d\mu$$
para cualquier $E \in \mathcal{M}$

4. (6 puntos) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua y monótona y m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Probar que si $m(E) = 0$ entonces $m(g[E]) = 0$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Una función entera f cumple que su desarrolo en serie de potencias alrededor de cada $w \in \mathbb{C}$ tiene algún coeficiente igual a cero. Muestre que f es un polinomio.

2. (6 puntos) Considere la función $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, con $|a| < 1$, encuentre

$$\int_{|z|=1} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

3. (6 puntos) Encuentre el mapa conforme que lleva la región

$$\mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \cup [-a, -1] \cup [1, b]) ,$$

donde $a, b > 1$ al exterior del círculo unitario. Para resolver este problema es útil recordar las propiedades de la transformación de Zhukovsky $w = z + 1/z$.

4. (6 puntos) Demuestre la siguiente afirmación que se debe a Hurwitz. Sea D una región cuya frontera es una curva cerrada simple. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en el interior de D tal que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \not\equiv 0$ uniformemente en D. El punto interior ζ de D es un cero de f si y sólo si ζ es un punto límite del conjunto de todos los ceros de los elementos de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Un punto que sea cero para una infinidad de n's en la sucesión se considerará punto límite de los ceros de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. (Para la demostración se puede utilizar el Teorema de Rouché y las propiedades del límite uniforme de una sucesión de funciones analíticas).