Examen General de Conocimientos
Álgebra Moderna. Junio de 2015.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Resolver tres ejercicios de la sección Grupos como sigue: Resuelve uno de los ejercicios 1 a 3, uno entre el 4 y el 5 y el ejercicio 6. Además resuelve tres de los ejercicios de la sección Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1 Grupos.

1. Si G es un grupo finito nilpotente de orden n y m es un divisor de n, demuestra que G tiene un subgrupo de orden m.
2. Si un grupo G tiene una serie de composición, demuestra que G es soluble si y sólo si G tiene una serie normal que termina en 1 con cada factor de orden una potencia de algún primo.
3. Si G es un p-grupo finito no trivial y H es un subgrupo propio de G, demuestra que H está contenido propiamente en su normalizador.
4. Sea G un grupo de orden 30.
   (a) Demuestra que G tiene un subgrupo de orden 15;
   (b) Si G no es abeliano, demuestra que G tiene mas de un 2-subgrupo de Sylow.
5. Si G es un grupo de orden $p^k q$ con p y q primos, $p > q$ y $k > 0$, demuestra que G no es simple y que es soluble.
6. Sea $n \geq 4$.
   (a) Encuentra los subgrupos normales de S_n y A_n;
   (b) Encuentra el subgrupo derivado de S_n y el de A_n.

2 Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea p un primo y $R = \{{}^{a}\!/_{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\}$. Demuestra que R es un anillo de ideales principales y describe sus unidades.
2. Sean E una extensión del campo F, $\alpha \in E$ algebraico sobre F y $f(x) \in F[x]$ el polinomio irreducible de α. Demuestra que si $f(x)$ es de grado impar entonces $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.
3. Sean $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ y E su campo de descomposición. Demuestra que el grupo de Galois de E sobre $\mathbb{Q}$ es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
4. Demuestra que para todo primo p y todo natural $n > 0$ existe un único campo (salvo isomorfismo) con p^n elementos.