Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2018-II.
18 de junio de 2018.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sean $f : G \longrightarrow H$ y $g : G \longrightarrow L$ homomorfismos de grupos con g suprayectivo. Demuestra que si $Ker(g) \subseteq Ker(f)$ entonces existe un único homomorfismo de grupos $h : L \longrightarrow H$ tal que $hg = f$. Además demuestra que $Im(f) = Im(h)$ y que $Ker(h) = g(Ker(f))$. ¿Cuándo es h inyectiva?

2. Sean G un grupo, $Z := Z(G)$ su centro, y $\theta \in Aut(G)$. Demuestra que $\theta(Z) = Z$.

3. Demuestra que si G es un grupo de orden pq con p y q primos tales que $p < q$ y $p \nmid (q-1)$, entonces G es cíclico.

4. Sean G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Demuestra que si N y ${}^{G}\!/_{N}$ son solubles entonces G es soluble.

5. Demuestra que un grupo de orden p^n, donde p es un primo y n es un natural positivo, es nilpotente.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea F un campo. Demuestra que son equivalentes para un ideal distinto de cero I de $F[x]$:
   (i) I es un ideal primo;
   (ii) I es un ideal máximo;
   (iii) I está generado por un polinomio irreducible.

2. Demuestra que $p(x) = x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}_7$ y que $\mathbb{Z}_7[x]/\langle p(x) \rangle$ es un campo con 49 elementos.

3. Sea $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
(*i*) Demuestra que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$;
(*ii*) Encuentra un campo de descomposición E de $f(x)$, $[E : \mathbb{Q}]$, y da una base de E sobre $\mathbb{Q}$;
(*iii*) Demuestra que $Gal(E/K) \cong S_3$
(*iv*) Para cada subgrupo $H \leq Gal(E/H)$, encuentra su campo fijo K_H.

4. Sean F un campo y $f(x) \in F[x]$ un polinomio mónico irreducible. Demuestra que existe un campo K, que extiende a F, en el que $f(x)$ tiene una raíz.

5. Sean $K \leq L \leq E$ extensiones de campo y suponga que E/K y L/K son extensiones de Galois. Demuestra que $Gal(E/L)$ es un subgrupo normal de $Gal(E/K)$ y que $Gal(L/K) \cong Gal(E/K)/Gal(E/L)$.