Examen General de Conocimientos,
Álgebra Moderna.
9 de enero de 2017.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Escoger y resolver sólamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si p es un primo que divide al orden del grupo G, entonces existe un elemento de G de orden p.

2. Sean $H_1, ..., H_n$ subgrupos normales del grupo G.
Definimos $\varphi : G \longrightarrow {}^{G}/_{H_1} \times ... \times {}^{G}/_{H_n}$ por $\varphi(g) = (gH_1, ..., gH_n)$:
(i) Demuestra que $Ker\varphi = H_1 \cap ... \cap H_n$;
(ii) Supongamos que $[G : H_i]$ es finito para cada $i = 1, ..., n$ y que si $i \neq j$, entonces $(|{}^{G}/_{H_i}|\,; |{}^{G}/_{H_j}|) = 1$. Demuestra que φ es suprayectiva y que $[G : H_1 \cap ... \cap H_n] = \prod_{i=1}^{n} |{}^{G}/_{H_i}|$.

3. Sea G un grupo de orden 30.
(i) Demuestra que G tiene un subgrupo de orden 15;
(ii) Si G no es abeliano, demuestra que G tiene más de un 2-subgrupo de Sylow.

4. Si $n \neq 4$, demuestra que A_n es el único subgrupo normal propio no trivial de S_n.

5. Demuestra que si N es un subgrupo normal de G tal que, tanto N como ${}^{G}/_{N}$ son grupos solubles, entonces G es soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea R un anillo conmutativo con 1.
(i) Un elemento $r \in R$ se llama nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = 0$. Demuestra que el conjunto de los elementos nilpotentes forman un ideal de R;
(ii) Sean u una unidad de R y a un elemento nilpotente de R. Demuestra que $u + a$ es una unidad de R;
(iii) Demuestra que las unidades en $R[x]$ son los elementos de la forma

$f(x) = u + \sum_{i=1}^{d} a_i x^i$, donde u es una unidad de R y cada a_i es un elemento nilpotente de R.

2. Demuestra que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

3. Sean K un campo de característica p primo y $a \in K$. Demuestra que el polinomio $x^p - a \in K[x]$ es irreducible sobre K o se factoriza totalmente en K.

4. Sean E una extensión del campo F y $a, b \in E$ tales que a es algebraico sobre F y b es algebraico sobre $F(a)$. Demuestra que b es algebraico sobre F.

5. Encuentre un campo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 2$ y encuentre su dimensión sobre $\mathbb{Q}$.