Examen General de Conocimientos,
Álgebra Moderna.
Semestre 2018-I.
10 de enero de 2018.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoger y resolver sólamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sean G y G' dos grupos con subgrupos normales H y H' respectivamente. Si $\varphi : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos tal que $\varphi(H) \subseteq H'$, demuestra lo siguiente:
   (a) φ induce un homomorfismo de grupos $\bar{\varphi} : {}^{G}\!/\!_{H} \longrightarrow {}^{G'}\!/\!_{H'}$;
   (b) Si φ es un isomorfismo y $\varphi(H) = H'$, entonces $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo.
2. Demuestra que cada grupo de orden 200 tiene un subgrupo normal no trivial que es abeliano.
3. Si G es un p-grupo finito no trivial y H es un subgrupo propio de G, demuestra que H está contenido propiamente en su normalizador.
4. Si G es un grupo de orden $p^k q$ con p y q primos, $p > q$ y $k > 0$, demuestra que G no es simple y que es soluble.
5. Si G es un grupo finito nilpotente de orden n y m es un divisor de n, demuestra que G tiene un subgrupo de orden m.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sean D un dominio entero y $F \subseteq D$ un campo tales que D es un espacio vectorial sobre F de dimensión finita. Demuestra que D es un campo.
2. Sea p un primo y considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{Q}$:
   $$\mathfrak{L}_p = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = {}^{a}\!/\!_{b}, \text{ donde } p \text{ no divide a } b\}.$$
   Demuestra que $\mathfrak{L}_p$ es un anillo de ideales principales y describe sus unidades.
3. Sean E una extensión del campo F, $\alpha \in E$ y $f(x) \in F[x]$ un polinomio irreducible tales que $f(\alpha) = 0$. Demuestra que si $f(x)$ es de grado impar, entonces $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.
4. Describa el grupo de Galois: $G = Gal\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{3}\right) |_{\mathbb{Q}}\right)$. Enliste los cuatro subgrupos propios de G y la correspondencia de Galois de los subcampos intermedios correspondientes. Además, exhiba la retícula de subcampos y de subgrupos. Argumente ampliamente su respuesta.